

This article was downloaded by:

On: 28 January 2011

Access details: *Access Details: Free Access*

Publisher *Taylor & Francis*

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



Physics and Chemistry of Liquids

Publication details, including instructions for authors and subscription information:

<http://www.informaworld.com/smpp/title~content=t713646857>

Déformations électrodynamique-capillaire de la surface libre d'un liquide diélectrique

G. Sabra^a; J. Fornazero^a; G. Mesnard^a

^a Université Claude Bernard de Lyon,

To cite this Article Sabra, G. , Fornazero, J. and Mesnard, G.(1976) 'Déformations électrodynamique-capillaire de la surface libre d'un liquide diélectrique', *Physics and Chemistry of Liquids*, 5: 4, 293 — 304

To link to this Article: DOI: 10.1080/00319107608084125

URL: <http://dx.doi.org/10.1080/00319107608084125>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Full terms and conditions of use: <http://www.informaworld.com/terms-and-conditions-of-access.pdf>

This article may be used for research, teaching and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, re-distribution, re-selling, loan or sub-licensing, systematic supply or distribution in any form to anyone is expressly forbidden.

The publisher does not give any warranty express or implied or make any representation that the contents will be complete or accurate or up to date. The accuracy of any instructions, formulae and drug doses should be independently verified with primary sources. The publisher shall not be liable for any loss, actions, claims, proceedings, demand or costs or damages whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with or arising out of the use of this material.

Déformation Electrodynamique-Capillaire de la Surface Libre d'un Liquide Diélectrique

G. SABRA, J. FORNAZERO

et

G. MESNARD

Université Claude Bernard de Lyon

Le liquide, en couche mince sur un substrat conducteur horizontal, est soumis à un flux uniforme de charges. On étudie les ondes progressives sinusoïdales de faible amplitude qui peuvent se former à la surface du liquide supposé parfait. On précise la relation entre la pulsation et le nombre d'onde pour le problème à une dimension. On est amené à distinguer le cas des grandes et celui des faibles longueurs d'onde.

A thin layer of the liquid on a horizontal conductive substrate is submitted to a uniform flow of charges. Wave propagation at the surface of a perfect liquid can then be obtained; sinusoidal waves of small amplitude are studied; the relation between frequency and wave number is given for the one-dimensional problem. It is necessary to distinguish between the cases of small and large wave numbers.

1 EQUATIONS DU MOUVEMENT

Nous nous proposons d'étudier la déformation de la surface libre d'une couche mince uniforme d'un liquide diélectrique, supposé parfait, soumis à un flux de charges uniforme d'électrons ou d'ions, une partie s'accumulant à la surface (et pouvant éventuellement migrer sur la surface), l'autre partie traversant la couche. Nous considérons que le passage d'un courant de

densité \vec{J} à travers la couche produit une force $\frac{\vec{J}}{\mu}$ par unité de volume, s'ajoutant à la force de pesanteur $\rho\vec{g}$, où ρ est la masse volumique. Le substrat métallique plan horizontal est à la masse. Un point du liquide est défini par ses coordonnées x , y et z , l'axe Oz étant vertical dirigé vers le haut; ζ désigne la cote d'un point de la surface libre; on a $\zeta = \zeta(x, y, t)$. \vec{J} est supposé indépendant de x et y , et aussi de z et t (régime permanent);

il en est de même pour μ . Nous avons déjà étudié des régimes statiques particuliers; nous envisageons ici d'autres types de comportement.

L'équation d'Euler et l'équation de continuité pour le mouvement s'écrivent, \vec{V} étant le vecteur vitesse et P la pression:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \vec{\nabla}) \vec{V} = -\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{\vec{J}}{\mu \rho} + \vec{g} \quad \vec{\nabla}, \vec{V} = 0.$$

Nous nous plaçons dans les conditions, qui seront précisées plus loin, où $(\vec{V}, \vec{\nabla}) \vec{V}$ peut être négligé; ceci correspond à des déformations de faible amplitude. Nous supposons pour simplifier la déformation uniforme dans la direction Oy , ce qui permet de laisser de côté la variable y . En supposant le vecteur \vec{J} d'intensité J dirigé vers les z négatifs, on a, en projetant sur les axes,

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{J}{\rho \mu} - g, \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

En dérivant l'équation (1) par rapport à z et l'équation (2) par rapport à x , on trouve en retranchant membre à membre

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial t \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) = 0.$$

Le rotationnel de \vec{V} est donc constant; il est nul si l'on tient compte des conditions du problème; par suite \vec{V} est le gradient d'un potentiel φ . L'équation (3) donne alors $\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = 0$, tandis que les équations (1) et (2) conduisent par intégration à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + \left(\frac{J}{\rho \mu} + g \right) z = f(t). \quad (4)$$

On s'intéresse aux valeurs de

$$V_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{et} \quad V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

φ peut donc être choisi à une fonction du temps près, ce qui permet de faire $f(t) \equiv 0$ dans l'équation (4), qui conduit finalement à

$$P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho g z - \frac{J}{\mu} z. \quad (5)$$

2 .POTENTIEL ET CHAMP ELECTRIQUE DANS LA COUCHE

Soit σ_0 la densité uniforme et constante des charges déposées sur la surface initialement au repos; celle-ci prend un potentiel constant V_0 . Supposons que le potentiel V varie linéairement à l'intérieur du liquide. En prenant $z = 0$ sur la surface libre, le potentiel est nul pour $z = -h$; on a donc d'une façon générale

$$V = \frac{V_0}{h}z + V_0,$$

h étant l'épaisseur de la couche.

Passons maintenant à un régime dynamique. Nous raisonnons sur une équation de la surface libre de la forme $\zeta = ae^{i(kx - \omega t)}$; il s'avérera que ce type de solution existe; il s'agit d'une onde d'amplitude a , de nombre d'onde k , de pulsation ω , de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. La condition de validité de la linéarisation de l'équation d'Euler est alors $a \ll \lambda$. Nous posons dans ce cas

$$V(x,z,t) = \frac{V_0}{h}z + V_0 + V_1(x,z,t), \text{ où } V_1(x,z,t)$$

est un potentiel correctif à déterminer.

En négligeant toute charge d'espace, on a $\Delta V = 0$, d'où $\Delta V_1 = 0$. Nous cherchons des solutions de la forme $V_1 = F(z) \exp i(kx - \omega t)$. On a donc

$$F''(z) - k^2 F(z) = 0,$$

d'où $F(z) = \alpha e^{kz} + \beta e^{-kz}$ et $V(x,z,t) = \frac{V_0}{h}z + V_0 + \alpha e^{kz} \exp i(kx - \omega t) + \beta e^{-kz} \exp i(kx - \omega t)$. On a toujours $V = 0$ pour $z = -h$ et on suppose que pour $z = \zeta$ on a encore $V = V_0$. La première condition donne

$$\alpha e^{-kh} + \beta e^{kh} = 0,$$

tandis que la seconde conduit pratiquement à

$$\frac{V_0}{h} \zeta + V_0 + (\alpha + \beta) \exp i(kx - \omega t) = V_0,$$

car, pour une faible déformation, $e^{k\zeta}$ et $e^{-k\zeta}$ sont très voisins de 1. Avec $\zeta = a \exp i(kx - \omega t)$, il vient $\frac{V_0}{h} a + \alpha + \beta = 0$. On en tire

$$\alpha = -\frac{V_0}{h} \frac{a \exp 2kh}{\exp 2kh - 1} \quad \beta = \frac{V_0}{h} \frac{a}{\exp 2kh - 1}.$$

Calculons maintenant le champ électrique à partir de la formule $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$.

On a:

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\left[\frac{V_0}{h} + (\alpha k \exp kz - \beta k \exp -kz) \exp i(kx - \omega t)\right]$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -[(i\alpha k \exp kz + i\beta k \exp -kz) \exp i(kx - \omega t)].$$

On voit que

$$E_z = -\frac{V_0}{h} - \frac{\alpha}{a} k \zeta \exp kz + \frac{\beta}{a} k \zeta \exp -kz$$

$$E_x = -i \left(\frac{\alpha}{a} k \zeta \exp kz + \frac{\beta}{a} k \zeta \exp -kz \right).$$

A partir de là, on peut introduire la densité d'énergie $\frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ et en particulier calculer la force par unité de surface $P_c = (\frac{1}{2}\epsilon E^2)_{z=\zeta}$. Or on a $E^2 = E_z^2 + E_x^2$. ζ étant un infiniment petit du premier ordre, on prendra simplement

$$(E^2)_{z=\zeta} = \left(\frac{V_0}{h}\right)^2 + 2\frac{V_0}{h} \frac{\alpha - \beta}{a} k \zeta.$$

Remplaçant α et β par leurs valeurs, il vient

$$P_c = \frac{1}{2} \epsilon \frac{V_0^2}{h^2} - \frac{\epsilon V_0^2}{h^2 \text{th} kh} k \zeta.$$

On voit que la contrainte électrique dépend du vecteur d'onde \vec{k} . En notant que $\sigma_0 = \frac{V_0}{h} \epsilon$, on a aussi

$$P_c = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{\epsilon} - \frac{\sigma_0^2}{\epsilon \text{th} kh} k \zeta \quad \text{ou encore} \quad P_c = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 - \frac{\epsilon E_0^2}{\text{th} kh} k \zeta,$$

E_0 étant le champ au repos dans le diélectrique.

3 CONDITIONS AUX LIMITES ET SOLUTION

Introduisons d'abord la tension superficielle du diélectrique liquide. P_s étant la pression dans le liquide au voisinage de la surface libre et P_0 la

pression extérieure, on a $P_s - P_0 = -A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$, A étant la constante capillaire.

P_0 est la somme de la pression P_g du gaz et de la pression P_c résultant de la charge accumulée sur la surface. Or la formule (5) permet d'exprimer P_s en faisant $z = \zeta$. On a donc

$$-\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} - \left(\rho g + \frac{J}{\mu} \right) \zeta = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{\epsilon} - \frac{\sigma_0^2}{\epsilon \operatorname{th} kh} k \zeta + P_g - A \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (6)$$

La composante de la vitesse du fluide normale à la surface, $(V_z)_{z=\zeta}$, est approximativement égale à $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$. On a donc $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=\zeta}$. On en déduit en dérivant l'équation (6) par rapport au temps

$$\left[-\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\rho g + \frac{J}{\mu} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\sigma_0^2}{\epsilon \operatorname{th} kh} k \frac{\partial \varphi}{\partial z} + A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right]_{z=\zeta} = 0 \quad (7)$$

C'est la condition concernant φ à la surface. φ est par ailleurs solution de l'équation de Laplace

$$\Delta \varphi = 0. \quad (8)$$

Nous cherchons une solution sous la forme $\varphi = f(z) \cos(kx - \omega t)$. En portant dans l'équation (8), on obtient $\Delta f - k^2 f = 0$, dont la solution est

$$f(z) = \alpha \exp(kz) + \beta \exp(-kz), \quad \text{d'où} \quad \varphi = [\alpha \exp(kz) + \beta \exp(-kz)] \cos(kx - \omega t).$$

Introduisons maintenant les conditions aux limites $z = \zeta$ et $z = -h$. D'abord pour $z = -h$, V_z doit être nulle. Or

$$V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = k[\alpha \exp(kz) - \beta \exp(-kz)] \cos(kx - \omega t).$$

On a donc $\alpha \exp(-kh) - \beta \exp(kh) = 0$, d'où

$$\varphi = \alpha' \operatorname{ch}[k(z + h)] \cos(kx - \omega t),$$

avec $\alpha' = 2\alpha \exp(-kh)$. Il reste à exprimer la condition (7) pour $z = \zeta$. On peut pratiquement y prendre $z = 0$ et on a finalement la relation suivante entre ω et k ;

$$\rho \omega^2 = \left[Ak^3 + \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right) k - \frac{\sigma_0^2}{\epsilon \operatorname{th} kh} k^2 \right] \operatorname{th} kh, \quad (9)$$

dans laquelle on voit que le signe de la charge n'intervient pas.

4 DISCUSSION

1 $kh \ll 1$ (ou encore $h \ll \lambda$)

Compte tenu de ce que α est petit, on est dans le cas de la figure 1. L'équation (9) se réduit à

$$\rho\omega^2 = k^2 h \left[Ak^2 + \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right) - \frac{\sigma_0^2}{\epsilon h} \right]. \quad (10)$$

On a représenté sur les figures 2 et 3 les deux formes possibles de courbes donnant $\rho\omega^2$ en fonction de k (pour k positif); elles correspondent respectivement à

$$\frac{J}{\mu} + \rho g > \frac{\sigma_0^2}{\epsilon h} \quad \text{et} \quad \frac{J}{\mu} + \rho g < \frac{\sigma_0^2}{\epsilon h}.$$

La deuxième forme est la forme courante quand on charge suffisamment une couche assez isolante. Il est intéressant de noter que l'on obtient $\omega = 0$ pour la valeur particulière

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{-\left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right) + \frac{\sigma_0^2}{\epsilon h}}.$$

En négligeant

$$\frac{J}{\mu} + \rho g$$

elle vaut

$$k_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\epsilon h A}}.$$

ζ est alors périodique en fonction de x , la courbe étant invariable au cours du temps. C'est la déformation "statique" déjà décrite précédemment.¹ Mais, pour que ce résultat soit correct, il faut respecter la condition

$$\frac{\sigma_0^2 h}{\epsilon A} \ll 1,$$

c'est-à-dire

$$\sigma_0^2 \ll \frac{\epsilon A}{h} \quad \text{ou} \quad V_0^2 \ll \frac{hA}{\epsilon}.$$

Les valeurs négatives de ω^2 ne correspondent pas à des ondes progressives. Celles-ci sont associées à des valeurs de k supérieures à k_0 , ce qui donne des fréquences de plus en plus élevées quand la longueur d'onde



FIGURE 1 Profil de la surface libre pour $kh < 1$.

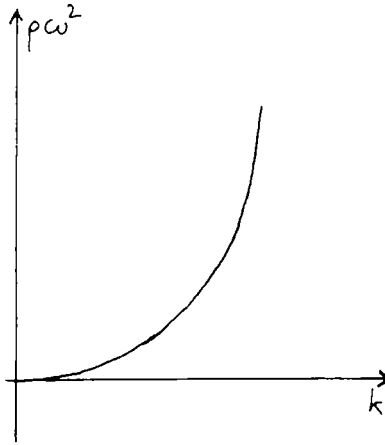


FIGURE 2 Relation entre $\rho\omega^2$ et k pour les faibles valeurs de σ_0 .

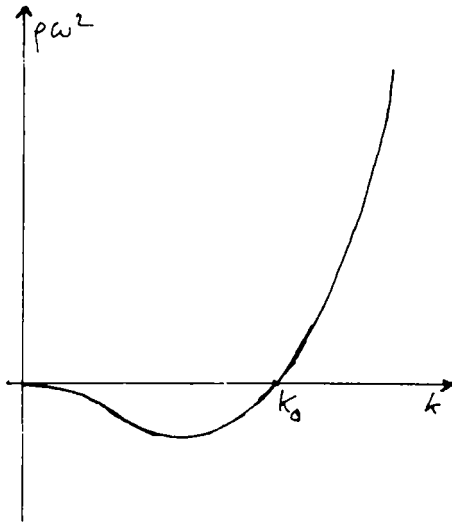


FIGURE 3 Relation entre $\rho\omega^2$ et k pour les fortes valeurs de σ_0 .

diminue, avec

$$\rho\omega^2 = hk^2(k^2 - k_0^2).$$

D'une façon générale le seuil d'existence de k_0 est

$$\sigma_0^2 \geq \epsilon h \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right).$$

2 $kh \gg 1$ (ou encore $h \gg \lambda$)

Compte tenu de ce que a est petit, on est dans le cas de la figure 4. L'équation (9) se réduit à

$$\rho\omega^2 = k \left[Ak^2 + \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right) - \frac{\sigma_0^2 k}{\epsilon} \right].$$

On note que h n'y figure pas. Il y a encore deux cas de figure à considérer pour la relation entre ω et k . Ceci est lié à l'existence de racines réelles ou non du polynôme du second degré en k que constitue la quantité entre crochets. Son discriminant est

$$\Delta = \left(\frac{\sigma_0^2}{\epsilon} \right)^2 - 4A \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right).$$

Si on a

$$\frac{\sigma_0^2}{\epsilon} < 2\sqrt{A \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right)},$$

Δ est négatif, les racines sont imaginaires, le polynôme, P_2 , est toujours positif. On a alors les deux courbes de la figure 5 pour P_2 et pour $\rho\omega^2$. Il y a alors des ondes progressives possibles pour toutes les valeurs de k .

Si on a

$$\frac{\sigma_0^2}{\epsilon} > 2\sqrt{A \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right)},$$

Δ est positif, les racines sont réelles et positives. On a alors les deux courbes de la figure 6 pour P_2 et pour $\rho\omega^2$. On a des ondes progressives seulement pour $k < k'$ et $k > k''$. On a

$$OM = \frac{J}{\mu} + \rho g, \quad k' = \frac{1}{2A} \left(\frac{\sigma_0^2}{\epsilon} - \sqrt{\Delta} \right), \quad k'' = \frac{1}{2A} \left(\frac{\sigma_0^2}{\epsilon} + \sqrt{\Delta} \right).$$

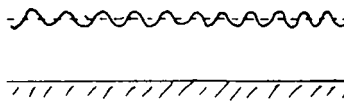


FIGURE 4 Profil de la surface libre pour $kh \gg 1$.

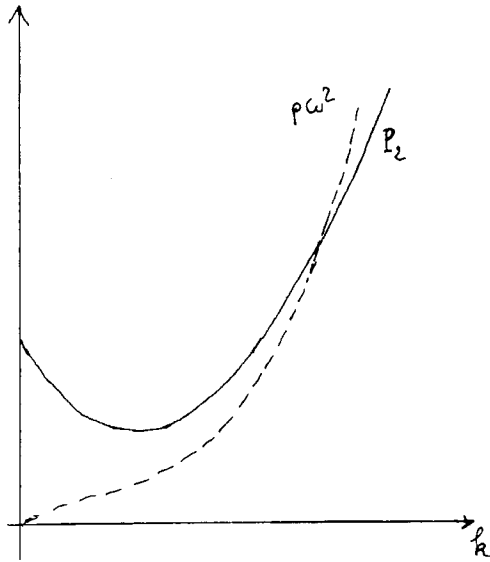


FIGURE 5 Variations de P_2 et $\rho\omega^2$ en fonction de k pour les faibles valeurs de σ_0 .

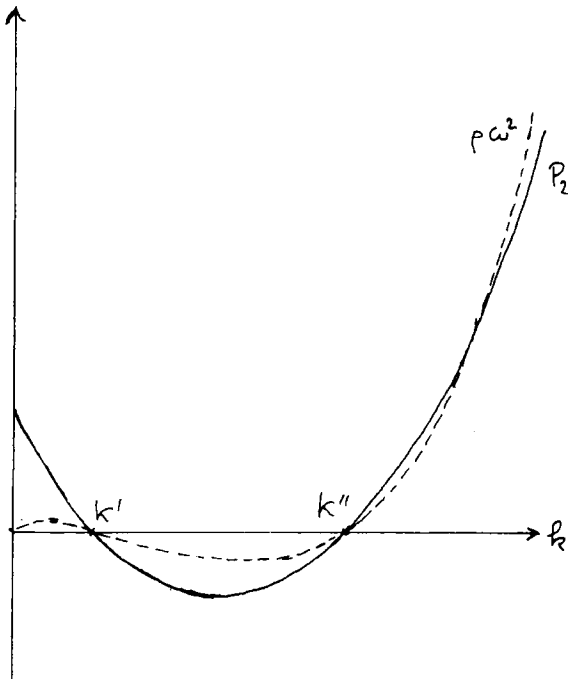


FIGURE 6 Variations de P_2 et $\rho\omega^2$ en fonction de k pour les fortes valeurs de σ_0 .

On peut noter que la valeur de k' est indépendante de la tension superficielle, si

$$\frac{J}{\mu} + \rho g$$

est faible, car alors on a sensiblement

$$k' = \frac{\epsilon}{\sigma_0^2} \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right), \quad k'' = \frac{\sigma_0^2}{\epsilon A} - \frac{\epsilon}{\sigma_0^2} \left(\frac{J}{\mu} + \rho g \right).$$

Précisons le cas où

$$\frac{J}{\mu} + \rho g$$

est tout à fait négligeable. On a

$$\rho \omega^2 = Ak^2(k - k_1) \quad \text{avec} \quad k_1 = \frac{\sigma_0^2}{\epsilon A}.$$

La courbe de $\rho \omega^2$ est représentée sur la figure 7; k_1 est la valeur minimale de k pour les ondes progressives, le cas limite $k = k_1$ correspondant à un régime statique. Ceci n'est valable qu'à la condition que

$$k_1 \gg \frac{1}{h}, \quad \text{soit} \quad \sigma_0^2 \gg \frac{A\epsilon}{h} \quad \text{ou} \quad V_0^2 \gg \frac{hA}{\epsilon}.$$

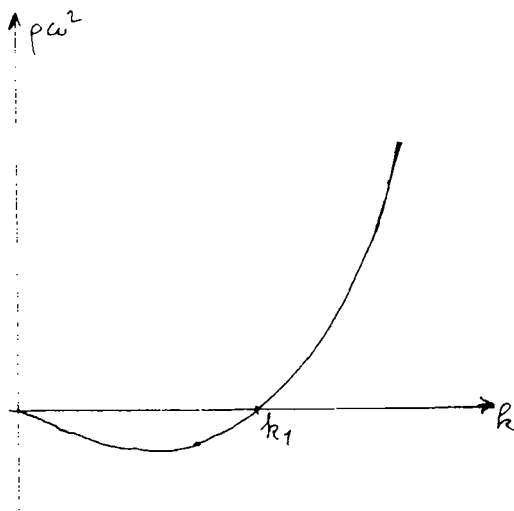


FIGURE 7 Cas particulier de la courbe précédente de $\rho \omega^2$ en fonction de k .

Discutons maintenant les régimes statiques en fonction de σ_0 , en négligeant

$$\frac{J}{\mu} + \rho g.$$

On a représenté, sur la figure 8, k en fonction de σ_0 ; la droite 1 est valable pour

$$\sigma_0 \ll \sqrt{\frac{\epsilon A}{h}},$$

la parabole 2 pour

$$\sigma_0 \gg \sqrt{\frac{\epsilon A}{h}}.$$

En trait plein on a indiqué la courbe correcte complète en remarquant que l'on a en fait pour

$$k = \frac{1}{h}, \sigma_0 = \left(\frac{\epsilon A}{h}\right)^{1/2} \text{ thl.}$$

La première partie de la courbe correspond à un régime qui a déjà été envisagé,¹ avec

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{\epsilon h A}} = \frac{V_0}{h} \sqrt{\frac{\epsilon}{h A}}.$$

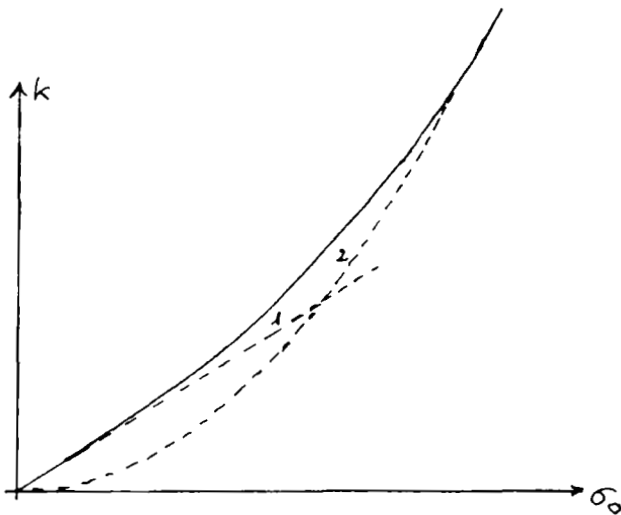


FIGURE 8 Variation de k en fonction de σ_0 pour les régimes statiques.

Revenons au cas général. La solution la plus générale du problème résulte de la superposition d'un ensemble de solutions du type envisagé. Il faut tenir compte des conditions sur les faces latérales du récipient qui limite le liquide. Ceci se traduit par le fait que l'on doit seulement retenir un certain ensemble de valeurs de k correspondant aux "modes" possibles. Il faut remarquer par ailleurs que l'on a négligé dans cette étude la viscosité. En fait, en l'absence de dispositif d'entretien, les ondes ont tendance à disparaître. Les modes statiques ou quasistatiques sont à ce titre privilégiés.

De toutes façons, nous avons présenté un modèle; dans la pratique d'autres situations peuvent se présenter.

Reference

1. G. Sabra, J. Fornazéro et G. Mesnard, *J. of Physics and Chemistry of Liquids*, 5, 271 (1976).